www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours ESSTIB 1990

Mathématiques B

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Probabilités

Une urne contient P boules blanches et Q boules noires. On procède à des séries de tirages avec remise immédiate de chaque boule tirée. On pose:

$$p = \frac{P}{P+Q} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{Q}{P+Q}.$$

1.– Soit n un entier strictement positif.

a) Déterminer la probabilité que les $(n-1)$ premiers tirages sortent une boule noire, et le $n^{\text{ième}}$ une boule blanche.

b) Soit T la variable aléatoire exprimant le rang où une boule blanche sort pour la première fois. Donner la loi de T.

2.– Soient T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi:

$$P(T_1 = n) = P(T_2 = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ pq^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer la probabilité $P(T_1 + T_2 = n)$.

b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n+1$, calculer la probabilité conditionnelle $P(T_1 = k \,|\, T_1 + T_2 = n+2)$ pour que $T_1 = k$, sachant que $T_1 + T_2 = n+2$.

3.– Déterminer la variable aléatoire exprimant le rang où une boule blanche sort pour la deuxième fois. Comparer avec la variable $T_1 + T_2$.

Analyse

NB: La notation $\operatorname{Ln} x$ désigne le logarithme népérien de x.

1.– Construire les courbes d'équation

$$y = x - 2 - \operatorname{Ln} x \qquad \text{et} \qquad y = 2 + \operatorname{Ln} x.$$

Montrer que l'équation $x = 2 + \operatorname{Ln} x$ admet deux solutions α et β, $\alpha < \beta$.

2.–

a) Démontrer que pour tout x tel que $1 \leq x \leq \beta$, on a:

$$1 \leq 2 + \operatorname{Ln} x \leq \beta.$$

b) Soit a tel que $1 \leq a \leq \beta$, et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence:

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = 2 + \operatorname{Ln} x_n, \quad n \geq 0.$$

Démontrer par récurrence que cette suite est croissante et reste majorée par β.

c) En déduire que cette suite est convergente. Soit l sa limite.
Démontrer que $l = \beta$.

d) Soit b tel que $b \geq \beta$, et soit $(y_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence:

$$y_0 = b, \qquad y_{n+1} = 2 + \operatorname{Ln} y_n, \quad n \geq 0.$$

Démontrer par récurrence que cette suite est décroissante et reste minorée par β.
Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge, et calculer sa limite.

3.– Déterminer deux nombres a et b tels que $1 \leq a \leq \beta \leq b$. En utilisant les deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ construites à partir des deux nombres a et b, donner un encadrement de β à 5.10^{-4} près.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail